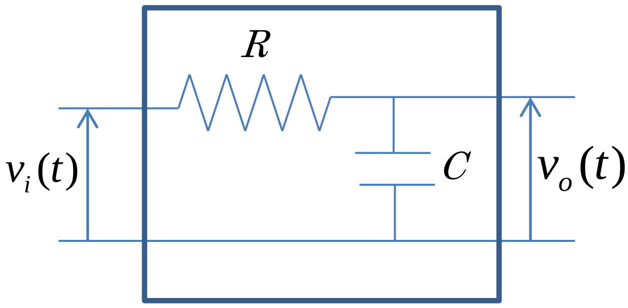
デジタル信号処理　小テストの模範解答

平成２３年７月１５日　古川　浩

以下の線形回路（線形システム）が与えられている。$v_i(t)$ および $v_o(t)$ は、それぞれ入力と出力を表す。次の設問に答えよ。



問１　上図の四角で囲ったシステムの伝達関数 $H(s)$ を求めよ。

抵抗 R を流れる電流を $i(t)$ とすると、上記回路より以下の連立微分方程式が得られる。

$$i(t) = C\frac{d}{dt}v_0(t)$$

$$v_i(t) = R\cdot i(t) + v_0(t)$$

上式より、*i(t)*を消去すると、

$$v_i(t) = RC\frac{d}{dt}v_0(t) + v_0(t)$$

両辺をラプラス変換すると、

$$V_i(s) = (RCs+1)V_0(s)$$

が導かれる。

$$V_0(s) = H(s)V_i(s)$$

であるから、

$$H(s) = \frac{1}{RCs+1}$$

が導かれる。

問２　上記線形システムのエネルギー伝達関数$|H(\omega)|^2$を求め、図示せよ。

問１の結果より、

$$H(s=j\omega)=H(\omega)=\frac{1}{RCj\omega+1}$$

すなわち、

$$|H(\omega)|^2=\frac{1}{R^2C^2\omega^2+1}$$

となる。これを図示すると下図のようになる。

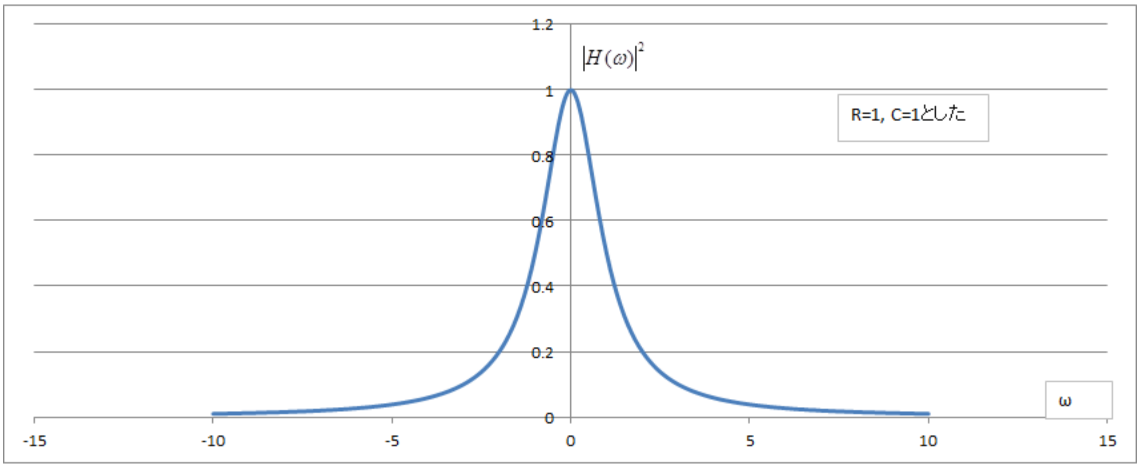


図１　$H(s=j\omega)$より得られたエネルギー伝達関数$|H(\omega)|^2$

問３　双一次変換により上記線形システムの伝達関数$H(z)$を求めよ。

問１で得られた$H(s)$に、双一次変換$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$を代入すると、

$$H\left(s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)=$$

$$H(z)=\frac{1}{RC\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}=\frac{T(1+z^{-1})}{(2RC+T)-(2RC-T)z^{-1}}$$

が導かれる。

問４　双一次変換後の伝達関数 $H(z)$ より、エネルギー伝達関数 $|H(\omega)|^2$ を求め、図示せよ。

ここで、サンプリング周期 T は適当に定めてよい。

問３の結果より、

$$H(z = e^{j\omega T}) =$$

$$H(\omega) = \frac{T(1+e^{-j\omega T})}{(2RC+T)-(2RC-T)e^{-j\omega T}}$$

が導かれる。ここで簡単のため、$T = 2RC$ とおくと、

$$H(\omega) = \frac{1+e^{-j2RC\omega}}{2}$$

となる。これより、

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1+\cos(2RC\omega)}{2}$$

が導かれる。上式を図示すると下図のようになる。

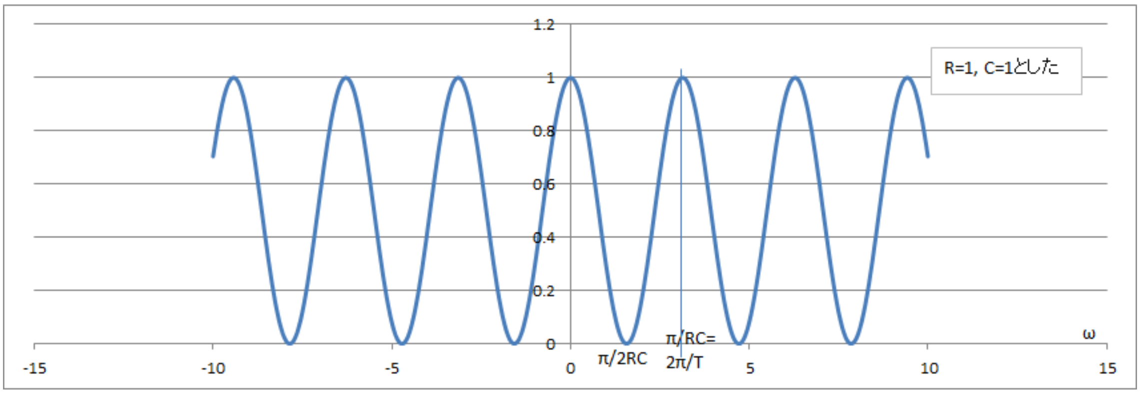


図２　$H(z = e^{j\omega T})$ より得られたエネルギー伝達関数 $|H(\omega)|^2$

問５　問２で求めた $|H(\omega)|^2$ と問４で求めた $|H(\omega)|^2$ の相違について考察せよ。

図１が示す通り、本回路は低域通過フィルタの特徴を持った線形システムである。図２は本回路を双一次変換により離散時間デジタルフィルタによって構成した場合のエネルギー伝達関数を表している。図２が示す通り、|ω|＜π/2RC の領域において、図１に示された低域通過特性が良く近似できていることが分る。|ω|を０から次第に大きくし、π/2RC へ

と近づけるにつれ、$|H(\omega)|^2$ は０へと収束し、| ω | = π/2RC において $|H(\omega)|^2$ は完全に０となる。これは、図１の低域通過フィルタの | ω |→∞の極限値が０に近づくことに依拠している。本離散時間デジタルフィルタのサンプリング周期はＴであるから、２π/T= π/RC の間隔で同じ伝達特性が繰り返し現れていることが分る。

問６　問３で求めた $H(z)$ より、上記線形システムの差分方程式を求め、さらにインパルス応答 $h[n]$ を求めよ。

$V_0(z) = H(z)V_i(z)$ であるから、問３より

$$V_0(z) = \frac{T(1+z^{-1})}{(2RC+T)-(2RC-T)z^{-1}} V_i(z)$$

が導かれる。上式の逆 z 変換を行い、差分方程式を求めると、

$$v_0[n] = \frac{T}{2RC+T}\{v_i[n]+v_i[n-1]\} + \frac{2RC-T}{2RC+T} v_o[n-1]$$

が導かれる。簡単のため、$T = 2RC$ とおくと、

$$v_0[n] = \frac{1}{2}\{v_i[n]+v_i[n-1]\}$$

となる。入力信号にインパルスを入力したときの $v_i[n]$、$v_i[n-1]$ ならびに $v_0[n]$ を調べると下表となる。

n	$v_i[n]$	$v_i[n-1]$	$v_0[n]$
0	1	0	1/2
1	0	1	1/2
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
:	:	:	:

上表の $v_0[n]$ はインパルスを入力とした場合の出力応答、すなわちインパルス応答を表している。すなわち $v_0[n]$ が求めたい $h[n]$ である。