平成２０年度ディジタル信号処理Ａ・Ｃ課程試験問題　平成２０年７月３１日

問１　N 行 N 列の DFT マトリクス D_N が以下のように与えられている。ただし、$W_N = \exp(-2\pi j / N)$、$N = 2^c$（ただし、c は自然数）とする。以下の設問に答えよ。

$$D_N = \begin{pmatrix} W_N^{0\cdot 0} & W_N^{0\cdot 1} & \cdots & W_N^{0\cdot (N-1)} \\ W_N^{1\cdot 0} & W_N^{1\cdot 1} & \cdots & W_N^{1\cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)\cdot 0} & W_N^{(N-1)\cdot 1} & \cdots & W_N^{(N-1)\cdot (N-1)} \end{pmatrix}$$

（１）　信号ベクトル $\vec{f} = (f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{N-1})^T$ が与えられたとき、$\vec{F} = (F_0 \quad F_1 \quad \cdots \quad F_{N-1})^T = D_N \vec{f}$ で定義されるベクトル $\vec{F}$ は何を表すか？

（２）　$D_N{}^H D_N$ を計算し、これにより $D_N{}^{-1}$ を定めよ。なお、行列 X が与えられたとき、X^H は X の複素共役転置行列を表す。

（３）　$E_{N/2}[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} \times W_{N/2}^{k\cdot n}$ を要素にもつ列ベクトルを $\vec{E}$、$Q_{N/2}[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} \times W_{N/2}^{k\cdot n}$ を要素に持つ列ベクトルを $\vec{Q}$ とすると、$\vec{E}$ と $\vec{Q}$ はそれぞれ以下により与えられる。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_{N/2}[0] \quad E_{N/2}[1] \quad \cdots \quad E_{N/2}[N/2-1])^T = D_{N/2}\vec{x} \\ \vec{Q} &= (Q_{N/2}[0] \quad Q_{N/2}[1] \quad \cdots \quad Q_{N/2}[N/2-1])^T = D_{N/2}\vec{y} \end{aligned} \qquad \cdots\text{(A)}$$

２つの列ベクトル、$\vec{x}$ と $\vec{y}$ を定めよ。

（４）　$\vec{F} = D_N \vec{f}$ より、$\vec{F}$ の各要素 F_m は以下のように変形される。

$$\begin{aligned} F_m &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n \times W_N^{m\cdot n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} \times W_N^{m\cdot 2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} \times W_N^{m\cdot (2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} \times W_{N/2}^{m\cdot n} + W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} \times W_{N/2}^{m\cdot n} \\ &= E_{N/2}\left[m\% \frac{N}{2}\right] + W_N^m Q_{N/2}\left[m\% \frac{N}{2}\right] \qquad \cdots\text{(B)} \end{aligned}$$

ここで、$m\%(N/2)$ は m を $N/2$ で割った余りを表す。N 行 N 列の行列 G を定めると、(A)式ならびに(B)式より以下の行列計算式が得られる。

$$\begin{aligned} \vec{F} &= G\left(\vec{E}^T \quad \vec{Q}^T\right)^T \\ &= G\left(E_{N/2}[0] \quad E_{N/2}[1] \quad \cdots \quad E_{N/2}[N/2-1] \quad Q_{N/2}[0] \quad Q_{N/2}[1] \quad \cdots \quad Q_{N/2}[N/2-1]\right)^T \qquad \cdots\text{(C)} \end{aligned}$$

N=8 とするとき、行列 G を求めよ。

（５）　N=8 とするとき、$\vec{F} = D_N \vec{f}$ の計算に必要な乗算数と、$\vec{F}$ が(C)式により計算される場合の乗算数を比較せよ。後者の算出に際しては、$\vec{E}$ と $\vec{Q}$ がそれぞれ(A)式で計算されることに留意せよ。

・・・裏面へ続く

問２　３次バタワースフィルタの伝達関数が次式のように与えられている。

$$H_3(s)=\frac{\omega_c{}^3}{(s+\omega_c)(s^2+\omega_c s+\omega_c{}^2)} \qquad \cdots①$$

T をサンプリング周期とし、①で与えられるバタワースフィルタをディジタルフィルタで表現することを考える。以下の設問にこたえよ。

（１）　$s=j\omega$ とし、$\left|H_3(j\omega)\right|^2$ を求め、図示せよ。横軸は ω とする。

（２）　$s \Leftarrow \dfrac{1-z^{-1}}{T}$ により①を直接置換した伝達関数を $K_3(z)$ とする。$K_3(z)$ を求めよ。ただし、$\omega_c T=2$ とする。

（３）　$K_3(z)$ の極を求め、当該ディジタルフィルタが安定であるかを議論せよ。

（４）　$K_3(z)$ を表すディジタルフィルタをブロック線図で描け。