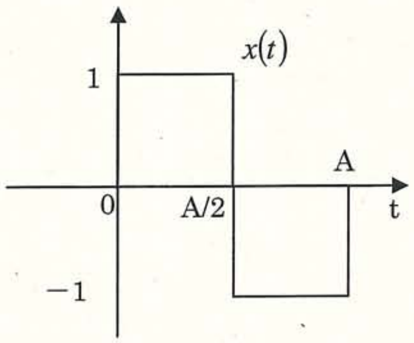
通信方式　自習課題　Ｈ２１年１１月１８日

次の信号$x(t)$が与えられているものとする。以下の設問に答えよ



(1) $x(t)$のフーリエ変換を$X(\omega)$とする。$X(\omega)$を求めよ。

(2) $x(t)$のエネルギーEを$X(\omega)$から求め、その結果を$x(t)$から直接求められるEと比較せよ。ヒント：$\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}$である。

(3) $x_p(t)$を、t=－∞～∞の間で周期 A の波形$x(t)$を繰り返す周期関数とする。$x_p(t)$の自己相関関数$C_p(t)$を求め、図示せよ。

(4) $C_p(t)$より、$x_p(t)$の電力密度スペクトル$D_p(\omega)$を求めよ。

(5) $x_p(t)$の平均電力Pを$D_p(\omega)$から求め、その結果を$x_p(t)$から直接求められるPと比較せよ。ヒント：$D_p(\omega)$の周期性に着目し、フーリエ級数で表せ。また、$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}$である。

(6) $x_p(t)$のエネルギーについて考察せよ。

H21.11.18 自習課題の模範解答

(1)

$$X(\omega)=\int_0^{A/2} e^{-j\omega t}dt-\int_{A/2}^{A} e^{-j\omega t}dt$$

$$=\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_0^{A/2}-\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{A/2}^{A}$$

$$=\frac{1}{j\omega}\left[-e^{j\omega A/2}+1+e^{-j\omega A}-e^{-j\omega A/2}\right]$$

$$=\frac{1}{j\omega}\left[1+e^{-j\omega A}-2e^{j\omega A/2}\right]$$

(2)

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2 d\omega \text{ より}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}\left(1+e^{-j\omega A}-2e^{-j\omega A/2}\right)\left(1+e^{j\omega A}-2e^{j\omega A/2}\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}\left(1+e^{j\omega A}-2e^{j\omega A/2}+e^{-j\omega A}+1-2e^{-j\omega A/2}\right.$$
$$\left.-2e^{-j\omega A/2}-2e^{j\omega A/2}+4\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}\left(6+2\cos\omega A-8\cos\omega A/2\right)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(\cos\omega A-4\cos\omega A/2+3)}{\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(\cos\frac{\omega A}{2}-1)^2}{\omega A/2}\cdot\frac{A^2}{4}d\omega$$

$\omega'=\omega A/2$ とおくと.

$$=\frac{A^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\cos\omega'-1}{\omega'}\right)^2\frac{2}{A}d\omega'$$

$$=\frac{A}{\pi}\cdot 2\int_0^{\infty}\left(\frac{\cos\omega'-1}{\omega'}\right)^2 d\omega'$$

$$=\frac{2A}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=A$$

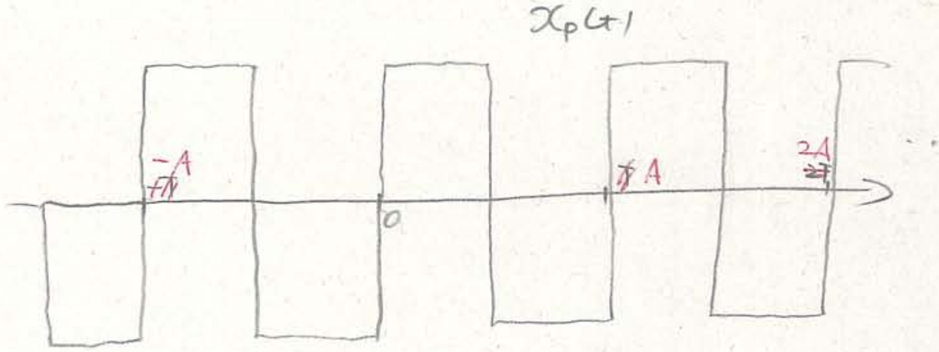
一方、時間軸上では

$$E = \int_0^{A/2} 1^2\,dt + \int_{A/2}^{A} (-1)^2\,dt$$

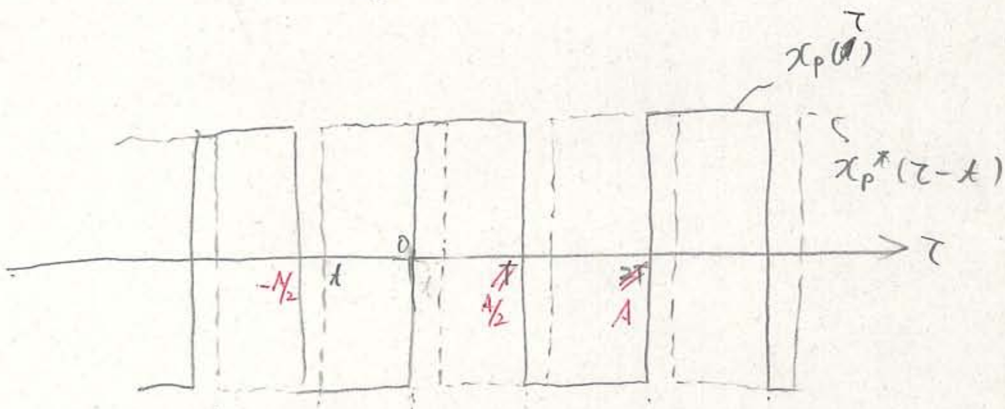
$$= A$$

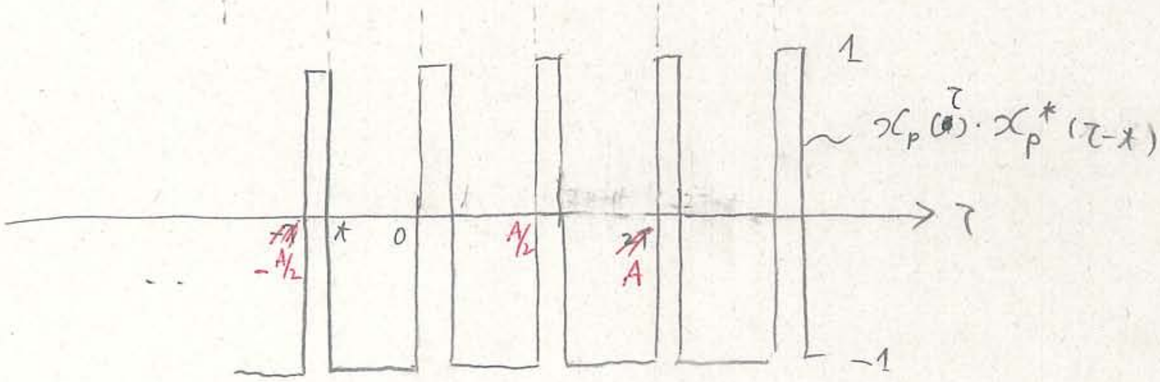
となり、周波数軸上 $X(\omega)$ より計算した結果と一致する。

(3)



$$C_p(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2S}\int_{-S}^{S} x_p(\tau)\, x_p^*(\tau - t)\, d\tau \quad \text{より}$$





$t = 0 \sim \cancel{T}\,\frac{A}{2}$ のとき

$$C_p(t) = \left\{-1 \times t + 1 \times \left(\cancel{T}\,\tfrac{A}{2} - t\right)\right\} \cancel{\frac{1}{T}}\,\frac{2}{A}$$

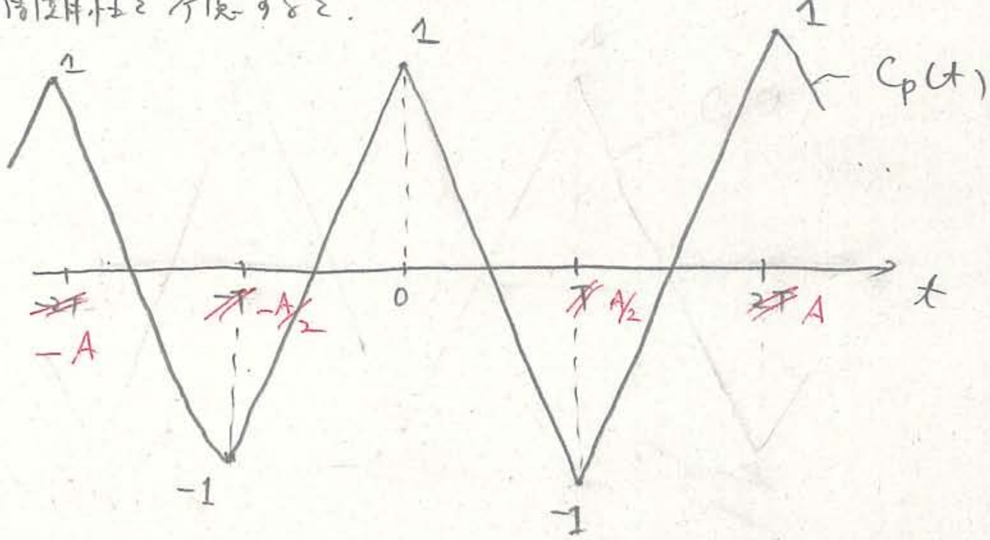
$$= \cancel{1 - \frac{2t}{T}}\quad 1 - \frac{4t}{A}$$

$t = -\cancel{T}\,\frac{A}{2} \sim 0$ のとき

$$C_p(t) = \left\{-1 \times (-t) + 1 \times \left(\cancel{T}\,\tfrac{A}{2} + t\right)\right\} \cancel{\frac{1}{T}}\,\frac{2}{A}$$

$$= \cancel{1 + \frac{2t}{T}}\quad 1 + \frac{4t}{A}$$

周期性を考慮すると、



が得られる。

(4) $D_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_p(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ で与えられる

$C_p(t)$ は周期関数であるため、フーリエ級数で与えられる。

周期は $2T$ であるから、

$$C_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \left(\because\ \omega_0 = \frac{2\pi}{\cancel{2T}\,A}\right)$$

$$F_n = \cancel{\frac{1}{2T}}\,\frac{1}{A}\left\{\int_{-\cancel{T}\frac{A}{2}}^{0} \left(1 + \cancel{\frac{2t}{T}}\,\frac{4t}{A}\right) e^{-jn\omega_0 t}\, dt + \int_{0}^{\cancel{T}\frac{A}{2}} \left(1 - \cancel{\frac{2t}{T}}\,\frac{4t}{A}\right) e^{-jn\omega_0 t}\, dt\right\}$$

$\omega \Leftarrow n\omega_0$ とおくと.

$$F_n = \frac{1}{A}\left[\int_{-A/2}^{A/2} e^{-j\omega t}\,dt + \underbrace{\int_{-A/2}^{0} \frac{4t}{A} e^{-j\omega t}\,dt - \int_{0}^{A/2} \frac{4t}{A} e^{-j\omega t}\,dt}_{\text{部分積分※}} \right]$$

$$= \frac{1}{A}\left[\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-A/2}^{A/2} + \left[\frac{4t\cdot e^{-j\omega t}}{-j\omega A}\right]_{-A/2}^{0} - \int_{-A/2}^{0} \frac{4\cdot e^{-j\omega t}}{-j\omega A}\,dt - \left[\frac{4t\cdot e^{-j\omega t}}{-j\omega A}\right]_{0}^{A/2} + \int_{0}^{A/2} \frac{4\cdot e^{-j\omega t}}{-j\omega A}\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{A}\left[-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega\frac{A}{2}} - e^{+j\omega\frac{A}{2}}\right) - \frac{2A\, e^{j\omega A/2}}{j\omega A} + \frac{4}{j\omega A}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-A/2}^{0} + \frac{2A\, e^{-j\omega A/2}}{j\omega A} - \frac{4}{j\omega A}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{0}^{A/2} \right]$$

$$= \frac{1}{A}\left[\frac{2j\sin \omega\frac{A}{2}}{j\omega} - \frac{2}{j\omega}\left(e^{j\omega A/2} - e^{-j\omega A/2}\right) + \frac{4}{\omega^2 A}\left(1 - e^{j\omega A/2}\right) - \frac{4}{\omega^2 A}\left(e^{-j\omega A/2} - 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{A}\left[2\frac{\sin \omega\frac{A}{2}}{\omega} - \frac{2}{j\omega}\cdot 2j\sin \omega\frac{A}{2} - \frac{4}{\omega^2 A}\left(-1 + e^{j\omega A/2} + e^{-j\omega A/2} - 1\right) \right]$$

$$= \frac{1}{A}\left[2\frac{\sin \omega\frac{A}{2}}{\omega} - \frac{4}{\omega}\sin \omega A/2 - \frac{4}{\omega^2 A}\left(2\cos \omega A/2 - 2\right) \right]$$

$$= \frac{1}{A}\left[-\frac{2}{\omega}\sin \omega\frac{A}{2} - \frac{8}{\omega^2 A}\left(\cos \omega\frac{A}{2} - 1\right) \right]$$

よって

$$F_n = -\frac{2\sin n\omega_0 A/2}{n\omega_0 A} - \frac{8}{(n\omega_0)^2 A^2}\left(\cos n\omega_0 \frac{A}{2} - 1\right)$$

$\frac{\omega_0 A}{2} = \pi$ より

$$F_n = -\frac{\sin n\pi}{n\pi} - \frac{2}{n^2\cdot\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right) = -\frac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

※

$$\int_A^B \frac{2t}{T} e^{-j\omega t}\,dt = \int_A^B \frac{2t}{T}\left(\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right)' dt = \left[\frac{2t}{T}\cdot\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_A^B - \int_A^B \frac{2}{T}\cdot\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\,dt$$

$$F_0 = -\left.\frac{(\sin n\pi)'}{(n\pi)'}\right|_{n=0} - \left.\frac{2(\cos n\pi - 1)''}{(n^2\pi^2)''}\right|_{n=0}$$

$$= -\left.\frac{\pi\cos n\pi}{\pi}\right|_{n=0} + \cos n\pi\Big|_{n=0} \quad \cdots (A)$$

$$= 0$$

$$F_n = -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \qquad (\because n \neq 0)$$

となる.

以上より

$$D_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_p(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - n\omega_0)} dt$$

$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ より

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)$$

となる. F_n は (A) で与えられる.

(5)
$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_p(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\, 2\pi\, \delta(\omega - n\omega_0)\,d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)\,d\omega$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}\frac{2}{(2n'+1)^2}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{4}$$

$$= 1$$ となる

一方、時間軸上でも明らかに平均電力は1

である

(6)
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x_p^2(t)\,d = \infty$$

となる