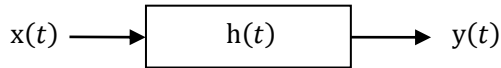


$x(t)$ を定常確率過程とし、その自己相関関数が $A_x(t) = E\{x(t')x(t' - t)\}$ (t は任意) で与えられているものとする。 $x(t)$ が以下の線形システム $h(t)$ を通過した後の出力応答を $y(t)$ とする。 $h(t)$ は実(数値)関数とする。



$y(t)$ の自己相関関数 $A_y(t)$ が、 $h(t)$ と $h(-t)$ を従属接続(直列に接続)した線形システムへ $A_x(t)$ を通過させた後の応答で与えられることを示せ。

解答例

$x(t)$ および $y(t)$ の電力密度スペクトルをそれぞれ $P_x(\omega)$ および $P_y(\omega)$ とおく。線形システムの出力応答の電力密度スペクトルは入力信号の電力密度スペクトルにエネルギー伝達関数を乗じたものであるから、

$$P_y(\omega) = |H(\omega)|^2 P_x(\omega) \quad \dots (A)$$

で与えられる。ここで、 $h(t)$ が実数値関数であること、および、 $|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega)$ より、 $|H(\omega)|^2$ の逆フーリエ変換は、 $h(t) * h(-t)$ で与えられる。 $P_x(\omega)$ および $P_y(\omega)$ は、それぞれ $A_x(t)$ および $A_y(t)$ のフーリエ変換で与えられるから、これらのことより、(A)式を逆フーリエ変換すると、

$$A_y(t) = h(t) * h(-t) * A_x(t)$$

が求まる。上式は、 $A_y(t)$ が、 $h(t)$ と $h(-t)$ を従属接続(直列に接続)した線形システムへ $A_x(t)$ を通過させた後の応答で与えられることを示している。